数理解析研究所講究録
887巻 1994年 226-242

Configuration space 上の measure のエルゴード分解

福井大学教育学部　下村宏彰（Hiroaki Shimomura）

§1. Introduction

X: connected C^∞-manifold, Γ_X: X 上の配位空間, μ: Γ_X 上の $Diff_0(X)$-quasi-invariant probability measure とする。（後述の定義参照）ここに

$Diff_0(X) = \{\psi \mid \psi$; diffeomorphism on X with compact support$\}$ である。この報告の目的は標題のように，μ のエルゴード分解が可能であることを示すことにある。細かい内容に入る前に，この分解の意義について触れておこう。

今，μ から自然に誘導される $Diff_0(X)$ の標準表現 U_μ，

(1) $U_\mu(\psi)$: $f(\gamma) \in L^2_\mu(\Gamma_X) \longrightarrow \sqrt{\dfrac{d T_\psi \mu}{d\mu}(\gamma)}\, f(T_\psi^{-1}(\gamma)) \in L^2_\mu(\Gamma_X)$,

ここに $T_\psi\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\} = \{\psi(x_1), \cdots, \psi(x_n), \cdots\}$ を考えよう。若し μ がエルゴディクならば，U_μ は既約ユニタリ表現である。更に標準表現と異なる別の type の表現との関り を論ずることもできる。その為に少しく準備をしよう。

m を X 上の局所的にはルベーグ測度と同値で，その density

は smooth な σ−finite measure とする。X の n 個の直積 X^n 上に，m の直積測度 m^n を作る。ρ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ のユニタリ表現，その表現空間を ϖ としよう。すると表現空間を

$H^\rho := \{ f \in L^2_{m^n}(X^n, \varpi) \mid f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \rho(\sigma)^{-1} f(x_1, \cdots, x_n) \}$

にもつ $\mathrm{diff}_0(X)$ の表現 V^n_ρ が，

(2) $V^n_\rho(\Psi) : f(x_1, \cdots, x_n) \in H^\rho \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{d\Psi m}{dm}(x_i)}\, f(\Psi^{-1}(x_1), \cdots, \Psi^{-1}(x_n))$

として定義される．Vershick−Gelfand−Graev は [4] において，以下の表現

(3) $U_\mu(\Psi) \otimes V^n_\rho(\Psi) =: U^\rho_\mu(\Psi)$

を基本表現と呼び，その性質を特に μ が Poisson measure であるときに詳しく調べた。U^ρ_μ は ρ が既約，μ がエルゴディックであれば既約ユニタリ表現になる。([4]) したがって，quasi-invariant measure のエルゴード分解は表現の立場からいえば，既約分解に対応していることになる。以下この分解が可能であることを節を追ってみてゆくことにしよう。

§2 Basic notion

始めに $\Gamma_X = \{ \gamma \mid \gamma$ は X の高々可算部分集合で，$\forall K$：コンパクト集合に対して，$K \cap \gamma$ は有限集合$\}$ とおき，Γ_X を X 上の配位空間と呼ぶ。更に $B^n_X := \{ \gamma \mid |\gamma| = n \}$，$B_X := \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n_X$

そして $\Delta_X := \{\gamma \mid |\gamma| = \infty\}$ とおく。ここで $|\gamma|$ は集合 γ の要素の個数を表す。Γ_X 上には，各 B：Borel set in X を固定してできる写像：$\gamma \longrightarrow |\gamma \cap B|$ を可測にする最小の σ-field $\mathcal{C}$ を考える。

定理1. $(\Gamma_X, \mathcal{C})$ は測度論的な意味で standard space である。(従って，この上の任意の確率測度は $\mathcal{C}$ の任意の sub-σ-field に関して条件附き確率測度で分解できることになる。([1], [3]))

次に $(\Gamma_X, \mathcal{C})$ 上の確率測度 μ について考えよう。若しも μ が Γ_X 上の変換 T_ψ について stable, i.e., $T_\psi\mu \simeq \mu$ for all $\psi \in \mathrm{Diff}_0(X)$ となるならば，μ を $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-invariant と呼ぶ。又このような μ が更に条件
"$\mu(T_\psi^{-1}(A) \ominus A) = 0$ for all $\psi \in \mathrm{Diff}_0(X)$ が成り立つのは，$\mu(A) = 1$ or 0 の時に限る" を満たす時，μ を $\mathrm{Diff}_0(X)$-ergodic と呼ぶ。当面の目標は，適当に測度空間 (Λ, ν) を定めて，
$\mu = \int \mu_\lambda \nu(d\lambda)$，$\mu_\lambda$；$\mathrm{Diff}_0(X)$-ergodic，かつ $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow$
$\mu_\lambda \perp \mu_{\lambda'}$ と μ を分解することにある。

さて $\alpha := \mu(B_X)$，$\beta := \mu(\Delta_X)$ とおくと，$\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$，
$\mu_1(E) := \mu(E \cap B_X)/\alpha$，$\mu_2(E) := \mu(E \cap \Delta_X)/\beta$ である。
μ_1 のほうは $\alpha_n := \mu_1(B_X^n)$ とおいて更に分解され，

$\mu_1=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\mu_{1,n}$, $\mu_{1,n}(E):=\mu_1(E\cap B_X^n)/\alpha_n$ となる。B_X^n は $\mathrm{Diff}_0(X)$ の作用に関して不変な集合だから，μ_{1n} は $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-inv measure である。所で；次の定理2が成り立つ。

定理2. B_X^n上の $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-invariant measure は，0でなければ m_n と同値になる。ここで m_n は X^n 上の直積測度 m^n，(これは $\tilde{X}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid \forall i\neq\forall j,\ x_i\neq x_j\}$ 上の測度とみなされる)，の写像 $P_n:(x_1,\cdots x_n)\in\tilde{X}^n\longmapsto\{x_1,\cdots,x_n\}\in B_X^n$ による image measure である。

定理2は後述の補題2の系としても掲げ，略証をのべるつもりであるから，ここでは，その証明を省略するが，この定理の直接の帰結として，B_X^n上の $\mathrm{Diff}_0(X)$-準不変測度は，0でなければ；必ずエルゴード的になることがわかる。それ故 μ_1 については $\{\mu_{1,n}\}$ の形で分解ができていることになる。μ_2のほうについて考えよう．以後 $\mu(\Delta_X)=1$ とする。
ここで集合 $\tilde{X}^\infty:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in X^\infty\mid \forall i\neq\forall j,\ x_i\neq x_j$，かつ $\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$ は集積点を持たない$\}$を表に出し，$\tilde{X}^\infty$ から Δ_X への自然な写像 P：$(x_1,\cdots x_n,\cdots)\to\{x_1,\cdots x_n\cdots\}$ の cross section S について考えよう。

今，Xの相対コンパクトな連結開集合の増大列$\{X_n\}$で$\overline{X_n}\subset X_{n+1}$, $X_n\uparrow X$となるものをひとつとって固定する。すると，この列に附随して次のような性質をもつ，measurable cross section sが存在する。([4])
"$\gamma\in\Delta_X$に対して$s(\gamma)=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$と$\gamma$の元をlist upする手順は，まず$X_1$の元を最初に並べ，次いで$X_2\setminus X_1$の元を並べ，・・・以下$X_n\setminus X_{n-1}$の元をというように順に並べていったものである"．$s$をadmissibleという。
sはone-to-oneな可測写像であるからΔ_Xのmeasurable setのsによるimageは$\tilde{X}^\infty$のmeasurable setである。
$\mathrm{Diff}_0(X)$の元ϕを$\tilde{X}^\infty$の元xに対角的に作用させることによって$\tilde{X}^\infty$上の変換T_ϕが定義(既に出てきたものと同じ記号を使う)$\tilde{X}^\infty$上のmeasureのquasi-invariance, ergodicityも以前と同様に定義される。

定理3.([4]) $\tilde{X}^\infty$上の$\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-invariant prob meas μがergodicなことと，tail-σ-field $\mathcal{B}_\infty$上でμがtrivial i.e., $\mu(A)=1$ or 0 $\forall A\in\mathcal{B}_\infty$，とは同値である。ここに $\mathcal{B}_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}P_n^{-1}(\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty))$, $P_n: x=(x_1,\cdots x_n,\cdots)\longrightarrow(x_{n+1},\cdots,)$, $\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty)$は$\tilde{X}^\infty$のBorel集合族である。

ここで，上のような admissible section S をとって Δ_X 上の確率測度 μ から次のような方法で，$\tilde{X}^\infty$ 上の確率測度 $\hat{\mu}$ を定義することにしよう。

$$\hat{\mu}(E) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty} c(\sigma)(S\mu)\sigma(E) \quad \text{for } E\in\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty),$$

ここに $\{c(\sigma)\}$ は positive sequence で $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty} c(\sigma)=1$，$\mathfrak{S}_\infty$ は $\mathbb{N}$ 上の finite permutation 全体を表す。又 $(S\mu)\sigma$ は写像 $\gamma\in\Gamma_X \xrightarrow{S} S(\gamma)=(x_1,\cdots x_n,\cdots) \xrightarrow{\sigma} (x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)},\cdots) =: S(\gamma)\sigma\in\tilde{X}^\infty$ による μ の image measure である。

定理4. ([4])

(a) μ : $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-inv iff $\hat{\mu}$ is so.

(b) μ : $\mathrm{Diff}_0(X)$-ergodic iff $\hat{\mu}$ is so

(c) $\tilde{X}^\infty$ 上の $\mathfrak{S}_\infty$-quasi-inv prob meas μ_1 が $\mu_1(\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty} S(\Gamma_X)\sigma)=1$ をみたせば $p\mu_1=\mu$ とおくとき $\hat{\mu}\cong\mu_1$.

証明は $p\hat{\mu}=\mu$ であることと，及び $\forall\gamma\in\Delta_X$ と $\forall\varPsi\in\mathrm{Diff}_0(X)$ について，$^\exists\sigma(\varPsi,\gamma)\in\mathfrak{S}_\infty$, s.t., $S(\varPsi^{-1}(\gamma))=\varPsi^{-1}(S(\gamma))\sigma(\varPsi,\gamma)$ であることに注意すれば容易に check できる。

§3. B_Y 上の $\mathrm{Diff}_0(Y)$-quasi-inv measure と $\mathrm{Diff}_0(X)$ の1径数部分群について.

始めに，φ の support が相対コンパクトな連結開集合 Y に含まれる $\mathrm{Diff}_0(X)$ の元全体を $\mathrm{Diff}_0(Y)$ で表すことにする。§2 の admissible cross section に触れた所の記号を使うと，$\mathrm{Diff}_0(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{Diff}_0(X_n)$ となる。(以後 Y は X_n のうちの任意のひとつを表わすものとする.)

さて Γ_X の元を $\gamma=(\gamma\cap Y)\cup(\gamma\cap Y^c)$ と分解して考えることによって，$\Gamma_X\simeq B_Y\times\Gamma_{Y^c}$ とみなすことができる。

$\pi_Y:\gamma\in\Gamma_X\longrightarrow\gamma\cap Y$, $\pi_{Y^c}:\gamma\in\Gamma_X\longrightarrow\gamma\cap Y^c\in\Gamma_{Y^c}$

とおこう。そして B_Y には，Y の各 Borel set B を固定してできる写像: $\gamma\in B_Y\longrightarrow|\gamma\cap B|$ が可測となる最小の σ-field $\mathcal{B}_Y$ を与える。Γ_{Y^c} にも同様に σ-field $\mathcal{B}_{Y^c}$ を定義すると，上の対応は可測空間としても同型である。

$(\Gamma_X,\mathcal{B})$ 上の $\mathrm{Diff}_0(Y)$-quasi-inv prob meas μ を $\pi_{Y^c}^{-1}(\mathcal{B}_{Y^c})$ に関して条件付き確率測度に分解すると，自然に $(B_Y,\mathcal{B}_Y)$ 上の確率測度が得られる。そこでしばらくの間 B_Y 上の，特にその support が B_Y^n にある $\mathrm{Diff}_0(Y)$-準不変測度 ν について考えてみることにしよう。g_n を Y^n から B_Y^n への自然な写像: $(y_1,\cdots,y_n)\longrightarrow\{y_1,\cdots,y_n\}$ として，g_n の

可測 cross section $\mathcal{S}$ をとり以前のように,

$\hat{\nu} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\mathcal{S}\nu)\sigma$ と定義してやると $\hat{\nu}$ が Ψ-quasi-inv なことと, ν が Ψ-quasi-inv なこととは同じになる。

さて $\hat{Y}^n$ は $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の形の可算個の開集合, (ここで O_i は写像 ψ_i によって $\mathbb{R}^d$ ($d = \dim(X)$) と diffeomorphic な相対コンパクトな開集合であり, $i \neq j \Rightarrow O_i \cap O_j = \phi$) によって被覆される。$\mathrm{Diff}_0(Y)$ は $\hat{Y}^n$ 上推移的に作用するから $\mathrm{Diff}_0(Y)$ のある可算部分集合 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって,

$\hat{Y}^n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(O_1 \times \cdots \times O_n)$ がこのような任意の $O_1 \times \cdots \times O_n$ について成り立つ。従って $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から生成した群 G_Λ について, $\hat{\nu}$ が準不変であれば $\hat{\nu}(O_1 \times \cdots \times O_n) > 0$ である。

ここで次の補題を準備する。

補題 1. $\mathbb{R}^d$ 上次の性質をもつ cpt support をもつ diffeomorphism の 1 径数部分群 $\pi_i^l(t)$ が存在する。すなわち $\forall l \in \mathbb{N}$ と $\max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i| < l$, $|t| < l$ なる任意の $(\xi_1, \cdots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ と $t \in \mathbb{R}$ について, $\pi_i^l(t)(\xi) = (\xi_1, \cdots, \overset{i}{\xi_i + t}, \cdots, \xi_d)$.

このような 1 径数部分群の存在は, $\mathbb{R}$ 上で $f_l(s) = 1$, if $|s| \leq 2l$, $f_l(s) = 0$, if $|s| \geq 3l$ となる C^∞-class の関数 f_l をとり $\mathbb{R}^d$ 上で次の微分方程式:

$$\frac{dX}{dt} = f_\ell(X_1)\cdots f_\ell(X_d)e_i, \quad e_i = (0,\cdots,\overset{i}{1},0\cdots 0)$$

を解き，$t=0$ で初期値 ξ をもつ解 $\Pi_i^\ell(t,\xi)$ をとることによって得られる。

ℓ と i をすべて動かして得られる $\{\Pi_i^\ell(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ から生成される $\mathrm{diff}_0(\mathbb{R}^d)$ の部分群を G_0 とおくと，容易に判るように，

○ $\forall \ell$, $\forall t=(t_1,\cdots,t_n)$, $\exists \Psi \in G_0$ s.t., $\max_{1\le i\le d}|\xi_i| < \ell \Rightarrow \Psi(\xi) = \xi + t$。 また

○ $\mathbb{R}^d$ 上 G_0 の作用で準不変な σ-finite measure m はルベーグ測度と同値である。

G_0 の元を Ψ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ で引き戻して $\mathrm{diff}_0(Y)$ の元に拡張しておく。その全体を $G_{0,i}$ とおくと $O_1\times\cdots\times O_n$ が最初に述べた可算個の範囲を動くとき，$G_{0,i}$ は高々可算個の部分群を形成する。これらと G_Λ とを合わせて次のことが成り立つ。

補題2. $\mathrm{diff}_0(Y)$ に高々可算個の1径数部分群 Π_i^n と可算群 G_Λ^n が存在して B_Y^n 上の任意の確率測度 ν について次のことは同値になる.

(a) ν : $\mathrm{diff}_0(Y)$-quasi-inv.

(b) ν ; Π_i^n and G_Λ^n-quasi-inv. for $i=1,2\cdots\cdots$

補題2の証明を再考すれば、次のことが成り立つことも容易にみてとれる。

(系) B_Υ^n 上の $\mathrm{diff}_0(\Upsilon)$-quasi-inv meas はそれが0でなければ m_n と同値である。

更に B_Υ 上の確率測度 ν に進めば、Π_i^n と G_Λ^n をすべて動かすことによって、

補題3. $\mathrm{diff}_0(\Upsilon)$ に高々可算個の1径数部分群 $\Pi_{i,\Upsilon}$ と可算群 G_Υ が存在して、B_Υ 上の任意の確率測度 ν について次は同値となる。

(a) ν : $\mathrm{diff}_0(\Upsilon)$-quasi-invariant

(b) ν : $\Pi_{i,\Upsilon}$ and G_Υ-quasi-invariant for $i=1,2,\ldots$

ひきつづき、Υ を相対コンパクトな連結開集合とし、$(\Gamma_X, \mathcal{B})$ 上の確率測度 μ を sub-σ-field $\pi_{\Upsilon^c}^{-1}(\mathcal{B}_{\Upsilon^c})$ に関して条件付き確率測度で分解すると、

$$\mu(A\times B)=\int_B \mu^\gamma(A)\,\pi_{\Upsilon^c}\mu(d\gamma) \quad \text{for } \forall A\in\mathcal{B}_\Upsilon,\ \forall B\in\mathcal{B}_{\Upsilon^c}$$

ここで μ^γ は $(B_\Upsilon, \mathcal{B}_\Upsilon)$ 上の確率測度で $\forall A\in\mathcal{B}_\Upsilon$ に対して $\mu^\gamma(A)$ は γ の関数として、$\mathcal{B}_{\Upsilon^c}$-measurable である。

補題4．次の二つは同値である．

(1) μ : $\mathrm{Diff}_0(Y)$-quasi-inv

(2) $\pi_{\Gamma^c}\mu$-a.e. γ で μ^γ は $\mathrm{Diff}_0(Y)$-quasi-inv.

略証 (2) ⟹ (1) は容易．(1) ⟹ (2) をみよう．$\forall\psi\in\mathrm{Diff}_0(Y)$ をとり，$T_\psi\mu(A\times B)$ を二通りの方法で計算する．

$$T_\psi\mu(A\times B)=\mu(T_\psi^{-1}(A)\times B)=\int_B T_\psi\mu^\gamma(A)\,\pi_{\Gamma^c}\mu(d\gamma)$$

他方，

$$T_\psi\mu(A\times B)=\int_B\int_A\frac{dT_\psi\mu}{d\mu}(\gamma')\,\mu^\gamma(d\gamma')\,\pi_{\Gamma^c}\mu(d\gamma).$$

これらより，$\pi_{\Gamma^c}\mu$-a.e. γ で $T_\psi\mu^\gamma\simeq\mu^\gamma$ が従う．この時，除外値集合は一般に個々の ψ に関係するので，残る所はそれが共通に測度0の集合でとれることを示すことにある。その為に補題3を用い，そして各一径数部分群 $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ $(\subset\mathrm{Diff}_0(Y))$ について $\{(t,\gamma)\mid T_{\psi_t}\mu^\gamma\simeq\mu^\gamma\}$ が2変数の jointly-measurable set にとりうることを示す必要がある。詳細については紙数の関係で省略しよう。

補題3，補題4およびこの節の冒頭の部分から次のことがわかる．

定理5　$\mathrm{Diff}_0(X)$ に高々可算個の1径数部分群，および ある可算群があり，それらの union を G とすると，次のことが成り立つ。$(\Gamma_X, \mathcal{C})$ 上の任意の確率測度 μ について，次は同値。

(a)　μ : $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-invariant

(b)　μ : G-quasi-invariant.

§4. $(\Gamma_X, \mathcal{C})$ 上の $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-inv prob meas μ のエルゴード分解について。

μ を標題のような測度，但し $\mu(\Delta_X)=1$ として，これから $\tilde{X}^\infty$ 上の測度 $\hat{\mu}$ を admissible section S を1つとって，§2 のようにして作る。そして $\hat{\mu}$ を sub-σ-field $\mathcal{B}_\infty$ に関して条件附き確率測度 $\{\hat{\mu}^x\}$ で分解する。いつもの通り，

(a)　固定した x について，$\hat{\mu}^x(\cdot)$ は $\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty)$ 上の確率測度で，

(b)　$\forall B \in \mathcal{B}(\tilde{X}^\infty)$ については，$\hat{\mu}^x(B)$ は x の関数として $\mathcal{B}_\infty$-measurable,

(c)　$\forall A \in \mathcal{B}_\infty$, $\forall B \in \mathcal{B}(\tilde{X}^\infty)$,　$\hat{\mu}(A \cap B) = \int_A \hat{\mu}^x(B)\hat{\mu}(dx)$

が成り立つ。更に $\mathcal{B}_\infty$ は可算生成な sub-σ-field $P_n^{-1}(\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty))$ (n について減少する) の交わりとして得られているので，

(d) $\exists A_1 \in \mathcal{B}_\infty$ with $\hat{\mu}(A_1)=1$ s.t., $\forall x\in A_1$, $\hat{\mu}^X$ は $\mathcal{B}_\infty$ 上で trivial となる（例えば［2］参照）

又 $\hat{\mu}^X$ は X の作り方から次をみたすことは容易にわかる。

(e) $\exists A_2 \in \mathcal{B}_\infty$ with $\mu(A_2)=1$ s.t., $\forall x\in A_2$, $\hat{\mu}^X$: $\mathfrak{S}_\infty$-quasi-inv かつ $\hat{\mu}^X(\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty} S(\overline{T_X})\sigma)=1$.

したがって，定理4の(c)により $p\hat{\mu}^X=\mu^{[X]}$ とおくと，

$\widehat{\mu^{[X]}} \simeq \hat{\mu}^X$ for $\forall x\in A_2$.

ここで，定理5にいう所の G をとると，$G=G_0\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\Pi_i$，$G_0$：可算群，$\Pi_i$：1径数部分群 となるので，補題4と同様の推論を行うことによって次のことが成立することがわかる。

(f) $\exists A_3\in\mathcal{B}_\infty$ with $\hat{\mu}(A_3)=1$ s.t., $x\in A_3 \Rightarrow \hat{\mu}^X$: G-quasi-inv（従って $Diff_0(X)$-quasi-inv である。）

したがって，定理4の(a)と(b)および上の(d)を用いれば，

(g) $x\in A_1\cap A_2\cap A_3$ のとき，$\mu^{[X]}$: $Diff_0(X)$-ergodic となる。

ここで，$A_1\cap A_2\cap A_3=\Omega$ とおくと

$\mu(S^{-1}(\Omega))=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty} C(\sigma)(S\mu)\sigma(\Omega)=\hat{\mu}(\Omega)=1$. それ故 μ^γ を $S^{-1}(\Omega)$ 上では $\mu^\gamma=\mu^{[S(\gamma)]}$ とし，$S^{-1}(\Omega)$ の外では適当な $Diff_0(X)$-ergodic prob meas として定めておくと，次の結果が得られる。

定理6 $(\overline{\Gamma}_X, \mathcal{B})$ 上の $\mu(\Delta_X) = 1$ なる $\mathrm{Diff}_0(X)$-quasi-inv prob meas μ に対して，次の性質をもつ Δ_X 上の $\mathrm{Diff}_0(X)$-ergodic prob meas $\{\mu^\gamma\}$ が存在する。

(a) $\forall E \in \mathcal{B}$ に対して，$\mu^\gamma(E)$ は $\gamma \in \Delta_X$ の関数として $S^{-1}(\mathcal{B}_\infty)$-measurable であり，

(b) $\forall E \in \mathcal{B}$, $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$, $\mu(E \cap S^{-1}(A)) = \int_{S^{-1}(A)} \mu^\gamma(E)\,\mu(d\gamma)$

証明は既に述べたことと，$A \in \mathcal{B}_\infty$ のとき，$\tilde{\mu}(A) = \mu(S^{-1}(A))$ に注意すれば難なく check できよう。

さてこの分解を見かけ上もう少し拡張しておこう。

$\mathcal{O}_\infty := \{B \in \mathcal{B} \mid \forall \Psi \in \mathrm{Diff}_0(X),\ T_\Psi B = B\}$ とおく。

容易にわかるように，$S^{-1}(\mathcal{B}_\infty) \subset \mathcal{O}_\infty$。更に，$A \in \mathcal{O}_\infty$ のとき，$\hat{A} := \{\gamma \in \Delta_X \mid \mu^\gamma(A) = 1\}$ とおくと，$\mu(\Delta_X) = 1$ のとき，$\forall E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\mu(E \cap \hat{A}) = \int_{\hat{A}} \mu^\gamma(E)\,\mu(d\gamma). \quad \text{他方}$$

$$\mu(E \cap A) = \int_{\Delta_X} \mu^\gamma(E)\,\mu^\gamma(A)\,\mu(d\gamma) = \int_{\hat{A}} \mu^\gamma(E)\,\mu(d\gamma)$$

こうして $\mu(\hat{A} \ominus A) = 0$ が成立する。更に Δ_X の外では任意にひとつとって来めた $\mathrm{Diff}_0(X)$-ergodic prob meas で μ^γ の定義を補うことにすれば，§2の冒頭に述べたことを考慮して，次の結果が成り立つ。

定理7. $(\Gamma_X, \mathcal{B})$ 上の任意の $\mathrm{diff}_0(X)$-quasi-inv prob meas μ に対して，ある prob meas の集まり $\{\mu^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_X}$ があって次の性質が成り立つ。

(a) 固定した γ について，μ^γ は $(\Gamma_X, \mathcal{B})$ 上の $\mathrm{diff}_0(X)$-ergodic meas で

(b) $\forall E\in\mathcal{B}$, $\mu^\gamma(E)$ は γ の $\mathfrak{A}_\infty$-measurable 関数，

(c) $\forall E\in\mathcal{B}, \forall A\in\mathfrak{A}_\infty, \mu(E\cap A)=\int_A \mu^\gamma(E)\mu(d\gamma)$.

定理7から次の補題が従う。

補題5. μ, ν ; $\mathrm{diff}_0(X)$-quasi-inv prob meas のとき，

$\mu \gtrsim \nu \overset{N.S}{\Longleftrightarrow} \exists A\in\mathcal{B}_\infty$ s.t., "$\nu(B)=0 \Longleftrightarrow \mu(A\cap B)=0$".

定理8.

(a), μ, ν ; $\mathrm{diff}_0(X)$-quasi-inv prob meas のとき，

$\mu \gtrsim \nu \overset{N.S}{\Longleftrightarrow} \mu \gtrsim \nu$ on $\mathfrak{A}_\infty$

(b) μ : $\mathrm{diff}_0(X)$-quasi-inv のとき

μ : ergodic $\overset{N.S}{\Longleftrightarrow} \mu = 1$ or 0 on $\mathfrak{A}_\infty$.

(c) μ, ν ; $\mathrm{diff}_0(X)$-ergodic のとき，$\mu\simeq\nu$ or $\mu\perp\nu$.

定理8はいずれも補題5から難なく導くことができる。

若し因子測度を互いに singular になるようにとりたいならば，次のような工夫がある。
$\forall E \in \mathscr{C}$ に対して，写像 $\gamma \longrightarrow \mu^\gamma(E)$ を可測にするような最小の σ-field $\mathscr{Q}$ は可算生成であることに注意すると，
$\exists p : \overline{I_X} \longrightarrow \mathbb{R}$ s.t., $\mathscr{Q} = p^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$。これより
$p(\gamma) = p(\delta) \overset{N.S}{\Longleftrightarrow} \mu^\gamma = \mu^\delta$ となり，定理7の (c) を使って推論すれば，$\mu^\gamma(p^{-1}(p(\gamma))) = 1$ for μ-a.e.γ.
従って，$t = p(\gamma)$ のとき $\mu_t = \mu^\gamma$ とおき，μ_t を $p\mu$-measure 0 の集合上で補正することによって，次の結果が得られる。

定理8. $(\overline{I_X}, \mathscr{C})$ 上の任意の $Diff_0(X)$-quasi-inv prob meas μ に対して，map p と確率測度の集り $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が存在して，次のことが成り立つ。
(a) $p : (\overline{I_X}, \mathfrak{A}_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, measurable map
(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, μ_t : $Diff_0(X)$-ergodic
(c) $\forall E \in \mathscr{C}$, $\mu_t(E)$: measurable func of t,
(d) $\exists T_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ with $p\mu(T_0) = 1$ s.t., $\forall t \in T_0$
$\mu_t(p^{-1}(t)) = 1$，特に μ_t は $t \in T_0$ のとき，互いに singular で
(e) $\forall E \in \mathscr{C}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(E \cap p^{-1}(B)) = \int_B \mu_t(E)\, p\mu(dt)$.

References

[1] K.R.Parthasarathy, Probability measure on metric spaces, Academic Press, 1967.

[2] H. Shimomura, Ergodic decomposition of quasi-invariant measures, PUBL RIMS, Kyoto Univ., 14, (1978) 359-381.

[3] ——————, Poisson measures on the configuration space and unitary representations of the group of diffeomorphisms, To appear in J. of Math. Kyoto Univ.34 (i994).

[4] A.M.Vershik, I.M.Gel'fand amd M.I.Graev, Representations of the group of diffeomorphisms, Usp.Mat.Nauk, 30 (1975) 3-50 (= Russ.Math.Surv.,30 (1975) 1-50).